4.21 Si x désigne le nombre d'œufs que la vieille femme avait apportés au marché, le problème revient à résoudre le système de congruences suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 1 \mod 4 \\ x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 1 \mod 6 \\ x \equiv 0 \mod 7 \end{cases}$$

En vertu des exercices 4.3 et 4.4, on a $x \equiv 1 \mod 6 \iff \begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 3 \end{cases}$.

Le système de congruences se ramène ainsi à :

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 1 \mod 4 \\ x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 0 \mod 7 \end{cases}$$

L'exercice 4.3 assure l'équivalence $x \equiv 1 \mod 4 \iff \begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$.

Par conséquent, le système de congruences se réduit à :

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 1 \mod 4 \\ x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 0 \mod 7 \end{cases}$$

où les entiers 3, 4, 5 et 7 sont deux à deux premiers entre eux, de sorte que le théorème chinois des restes peut s'y appliquer.

$\mathrm{M} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$

$\mathrm{M}_1 = \frac{420}{3} = 140$

$\mathrm{M}_2 = \frac{420}{4} = 105$

$\mathrm{M}_3 = \frac{420}{5} = 84$

$\mathrm{M}_4 = \frac{420}{7} = 60$

$140\, x_1 \equiv 1 \mod 3$

$-x_1 \equiv 1 \mod 3$ car $140 \equiv 140 - 3 \cdot 47 \equiv -1 \mod 3$

$x_1 \equiv -1 \mod 3$

$105\, x_2 \equiv 1 \mod 4$

$x_2 \equiv 1 \mod 4$ car $105 \equiv 104 + 1 \equiv 26 \cdot 4 + 1 \equiv 1 \mod 4$

$84\, x_3 \equiv 1 \mod 5$

$-x_3 \equiv 1 \mod 5$ car $84 \equiv 84 - 5 \cdot 17 \equiv -1 \mod 5$

$x_3 \equiv -1 \mod 5$

$60\, x_4 \equiv 1 \mod 7$

$4\,x_4 \equiv 1 \mod 7 \qquad \text{car } 60 \equiv 56 + 4 \equiv 7 \cdot 8 + 4 \equiv 4 \mod 7$

$8\,x_4 \equiv 2 \mod 7$

$x_4 \equiv 2 \mod 7 \qquad \text{car } 8 \equiv 7 + 1 \equiv 1 \mod 7$

La solution générale du système de congruences vaut dès lors :

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \cdot 140 \cdot (-1) + 1 \cdot 105 \cdot 1 + 1 \cdot 84 \cdot (-1) + 0 \cdot 60 \cdot 2 \\ &\equiv -119 \\ &\equiv 301 \mod 420 \end{aligned}$$

On a ainsi trouvé que la vieille femme devait avoir au minimum 301 œufs.