4.9 1) Comme 12 et 25 sont premiers entre eux, l'équation admet une solution.

$12\,x \equiv 5 \mod 25$

$24\,x \equiv 10 \mod 25$

$-x \equiv 10 \mod 25$

$x \equiv -10 \mod 25$

$x \equiv 15 \mod 25$

2) $12\,x \equiv 5 \mod 36 \iff 12\,x + 36\,y = 5$

Comme $\text{pgcd}(12, 36) = 12$ ne divise pas 5, l'équation diophantienne n'a pas de solution.

3) Comme 12 et 47 sont premiers entre eux, l'équation admet une solution.

$12\,x \equiv 5 \mod 47$

$48\,x \equiv 20 \mod 47$

$x \equiv 20 \mod 47$

4) $12\,x \equiv 5 \mod 58 \iff 12\,x + 58\,y = 5$

Comme $\text{pgcd}(12, 58) = 2$ ne divise pas 5, l'équation diophantienne n'a pas de solution.

5) $313\,x \equiv 1 \mod 543 \iff 313\,x + 543\,y = 1\,.$

Calculons $\text{pgcd}(313, 543)$ grâce à l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{rcrcr@{\quad}c@{\quad}rcl}
543 &=& 313 \cdot 1 &+& 230 & \Longrightarrow & 230 &=& 543 - 313 \cdot 1 \\
313 &=& 230 \cdot 1 &+& 83 & \Longrightarrow & 83 &=& 313 - 230 \cdot 1 \\
230 &=& 83 \cdot 2 &+& 64 & \Longrightarrow & 64 &=& 230 - 83 \cdot 2 \\
83 &=& 64 \cdot 1 &+& 19 & \Longrightarrow & 19 &=& 83 - 64 \cdot 1 \\
64 &=& 19 \cdot 3 &+& 7 & \Longrightarrow & 7 &=& 64 - 19 \cdot 3 \\
19 &=& 7 \cdot 2 &+& 5 & \Longrightarrow & 5 &=& 19 - 7 \cdot 2 \\
7 &=& 5 \cdot 1 &+& 2 & \Longrightarrow & 2 &=& 7 - 5 \cdot 1 \\
5 &=& 2 \cdot 2 &+& 1 & \Longrightarrow & 1 &=& 5 - 2 \cdot 2 \\
2 &=& 1 \cdot 2 &&&&&&
\end{array}$$

Ainsi $\text{pgcd}(313, 543) = 1$. Puisque 1 divise 1, l'équation diophantienne $313\,x + 543\,y = 1$ admet une infinité de solutions.

Déterminons une solution particulière :

$$\begin{aligned}
1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\
&= 5 - (7 - 5 \cdot 1) \cdot 2 = 7 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\
&= 7 \cdot (-2) + (19 - 7 \cdot 2) \cdot 3 = 19 \cdot 3 + 7 \cdot (-8) \\
&= 19 \cdot 3 + (64 - 19 \cdot 3) \cdot (-8) = 64 \cdot (-8) + 19 \cdot 27 \\
&= 64 \cdot (-8) + (83 - 64 \cdot 1) \cdot 27 = 83 \cdot 27 + 64 \cdot (-35) \\
&= 83 \cdot 27 + (230 - 83 \cdot 2) \cdot (-35) = 230 \cdot (-35) + 83 \cdot 97 \\
&= 230 \cdot (-35) + (313 - 230 \cdot 1) \cdot 97 = 313 \cdot 97 + 230 \cdot (-132) \\
&= 313 \cdot 97 + (543 - 313 \cdot 1) \cdot (-132) = 543 \cdot (-132) + 313 \cdot 229
\end{aligned}$$

L'équation diophantienne $313\,x + 543\,y = 1$ admet pour solution générale :

$\begin{cases} x = 229 + 543\,k \\ y = -132 - 313\,k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Donc $x \equiv 229 \mod 543\,.$

6) $7\,x \equiv 1 \mod 215 \iff 7\,x + 215\,y = 1$

Calculons $\text{pgcd}(7, 215)$ grâce à l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{rcl} 215 = 7 \cdot 30 + 5 & \Longrightarrow & 5 = 215 - 7 \cdot 30 \\ 7 = 5 \cdot 1 \;\; + 2 & \Longrightarrow & 2 = \quad\; 7 - 5 \cdot 1 \\ 5 = 2 \cdot 2 \;\; + 1 & \Longrightarrow & 1 = \quad\; 5 - 2 \cdot 2 \\ 2 = 1 \cdot 2 & & \end{array}$$

On a obtenu $\text{pgcd}(7, 215) = 1$. Puisque 1 divise 1, l'équation $7\,x + 215\,y = 1$ admet une infinité de solutions.

Déterminons une solution particulière :

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 5 - (7 - 5 \cdot 1) \cdot 2 = 7 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\ &= 7 \cdot (-2) + (215 - 7 \cdot 30) \cdot 3 = 215 \cdot 3 + 7 \cdot (-92) \end{aligned}$$

L'équation diophantienne $7\,x + 215\,y = 1$ admet pour solution générale :

$\begin{cases} x = -92 + 215\,k = 123 + 215\,k \\ y = 3 - 7\,k = -4 - 7\,k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Donc $x \equiv 123 \mod 215$.

7) $7\,x \equiv 13 \mod 215 \iff 7\,x + 215\,y = 13$

La question précédente a donné $215 \cdot 3 + 7 \cdot (-92) = 1$.

En multipliant cette égalité par 13, on obtient : $215 \cdot 39 + 7 \cdot (-1196) = 13$.

L'équation diophantienne $7\,x + 215\,y = 13$ admet pour solution générale :

$\begin{cases} x = -1196 + 215\,k = 94 + 215\,k \\ y = 39 - 7\,k = -3 - 7\,k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Donc $x \equiv 94 \mod 215$.