6.14 Le petit théorème de Fermat fournit $a^{13-1} \equiv a^{12} \equiv 1 \mod 13$ pour tout entier a non divisible par 13.

D'après l'exercice 6.13, l'ordre de tout élément non nul de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ doit être un diviseur de 12 ; ce ne peut donc être que 1, 2, 3, 4, 6 ou 12.

1) $1^1 \equiv 1 \mod 13$
$\overline{1}$ est d'ordre 1.

2) $2^1 \equiv 2 \not\equiv 1 \mod 13$
$2^2 \equiv 4 \not\equiv 1 \mod 13$
$2^3 \equiv 8 \not\equiv 1 \mod 13$
$2^4 \equiv 16 \equiv 3 \not\equiv 1 \mod 13$
$2^6 \equiv 64 \equiv 12 \not\equiv 1 \mod 13$
$2^{12} \equiv 1 \mod 13$
$\overline{2}$ est d'ordre 12.

3) $3^1 \equiv 3 \not\equiv 1 \mod 13$
$3^2 \equiv 9 \not\equiv 1 \mod 13$
$3^3 \equiv 27 \equiv 1 \mod 13$
$\overline{3}$ est d'ordre 3.

4) $4^1 \equiv 4 \not\equiv 1 \mod 13$
$4^2 \equiv 16 \equiv 3 \not\equiv 1 \mod 13$
$4^3 \equiv 4 \cdot 4^2 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 12 \not\equiv 1 \mod 13$
$4^4 \equiv (4^2)^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \not\equiv 1 \mod 13$
$4^6 \equiv (4^3)^2 \equiv 12^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \mod 13$
$\overline{4}$ est d'ordre 6.

5) $5^1 \equiv 5 \not\equiv 1 \mod 13$
$5^2 \equiv 25 \equiv 12 \not\equiv 1 \mod 13$
$5^3 \equiv 5^1 \cdot 5^2 \equiv 5 \cdot 12 \equiv 60 \equiv 8 \not\equiv 1 \mod 13$
$5^4 \equiv \left(5^2\right)^2 \equiv 12^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \mod 13$
$\overline{5}$ est d'ordre 4.

6) $6^1 \equiv 6 \not\equiv 1 \mod 13$
$6^2 \equiv 36 \equiv 10 \not\equiv 1 \mod 13$
$6^3 \equiv 6 \cdot 6^2 \equiv 6 \cdot 10 \equiv 60 \equiv 8 \not\equiv 1 \mod 13$
$6^4 \equiv 6 \cdot 6^3 \equiv 6 \cdot 8 \equiv 48 \equiv 9 \not\equiv 1 \mod 13$
$6^6 \equiv (6^3)^2 \equiv 8^2 \equiv 64 \equiv 12 \not\equiv 1 \mod 13$
$6^{12} \equiv 1 \mod 13$
$\overline{6}$ est d'ordre 12.

7) $7^1 \equiv 7 \not\equiv 1 \mod 13$
$7^2 \equiv 49 \equiv 10 \not\equiv 1 \mod 13$
$7^3 \equiv 7 \cdot 7^2 \equiv 7 \cdot 10 \equiv 70 \equiv 5 \not\equiv 1 \mod 13$
$7^4 \equiv 7 \cdot 7^3 \equiv 7 \cdot 5 \equiv 35 \equiv 9 \not\equiv 1 \mod 13$
$7^6 \equiv (7^3)^2 \equiv 5^2 \equiv 25 \equiv 12 \not\equiv 1 \mod 13$
$7^{12} \equiv 1 \mod 13$
$\overline{7}$ est d'ordre 12.

8) $8^1 \equiv 8 \not\equiv 1 \mod 13$
$8^2 \equiv 64 \equiv 12 \not\equiv 1 \mod 13$
$8^3 \equiv 8 \cdot 8^2 \equiv 8 \cdot 12 \equiv 8 \cdot (-1) \equiv -8 \equiv 5 \not\equiv 1 \mod 13$
$8^4 \equiv (8^2)^2 \equiv 12^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \mod 13$
$\overline{8}$ est d'ordre 4.

9) $9^1 \equiv 9 \not\equiv 1 \mod 13$
$9^2 \equiv (-4)^2 \equiv 16 \equiv 3 \not\equiv 1 \mod 13$
$9^3 \equiv 9 \cdot 9^2 \equiv 9 \cdot 3 \equiv 27 \equiv 1 \mod 13$
$\overline{9}$ est d'ordre 3.

10) $10^1 \equiv 10 \not\equiv 1 \mod 13$
$10^2 \equiv (-3)^2 \equiv 9 \not\equiv 1 \mod 13$
$10^3 \equiv 10 \cdot 10^2 \equiv (-3) \equiv 9 \equiv -27 \equiv -1 \equiv 12 \not\equiv 1 \mod 13$
$10^4 \equiv 10 \cdot 10^3 \equiv (-3) \cdot (-1) \equiv 3 \not\equiv 1 \mod 13$
$10^6 \equiv (10^3)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \mod 13$
$\overline{10}$ est d'ordre 6.

11) $11^1 \equiv 11 \not\equiv 1 \mod 13$
$11^2 \equiv (-2)^2 \equiv 4 \not\equiv 1 \mod 13$
$11^3 \equiv 11 \cdot 11^2 \equiv (-2) \cdot 4 \equiv -8 \equiv 5 \not\equiv 1 \mod 13$
$11^4 \equiv (11^2)^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 3 \not\equiv 1 \mod 13$
$11^6 \equiv (11^3)^2 \equiv 5^2 \equiv 25 \equiv 12 \not\equiv 1 \mod 13$
$11^{12} \equiv 1 \mod 13$
$\overline{11}$ est d'ordre 12.

12) $12^1 \equiv 12 \not\equiv 1 \mod 13$
$12^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \mod 13$
$\overline{12}$ est d'ordre 2.