6.19 $$\begin{aligned} n^{13} - n &= n\,(n^{12} - 1) \\ &= n\,(n^6 + 1)\,(n^6 - 1) \\ &= n\,(n^6 + 1)\,(n^3 + 1)\,(n^3 - 1) \\ &= n\,(n^6 + 1)\,(n + 1)\,(n^2 - n + 1)\,(n - 1)\,(n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

Puisque $n^{13} - n$ est divisible par les trois entiers consécutifs $n - 1$, n et $n - 1$, on conclut d'ores et déjà que $n^{13} - n$ est divisible par 2 et par 3.

1) Montrons que $n^{13} - n$ est divisible par 5.
   (a) Supposons que 5 divise n.
   Alors, 5 divise a fortiori $n\,(n^{12} - 1) = n^{13} - n$.

   (b) Supposons que 5 ne divise pas n.
   Alors $\operatorname{pgcd}(5, n) = 1$, attendu que 5 est premier.
   Le petit théorème de Fermat implique $n^{5-1} \equiv n^4 \equiv 1 \mod 5$.
   Donc $n^{12} \equiv (n^4)^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \mod 5$.
   D'où $n^{12} - 1 \equiv 0 \mod 5$, c'est-à-dire 5 divise $n^{12} - 1$.
   Par suite, 5 divise $n\,(n^{12} - 1) = n^{13} - n$.

2) Montrons que $n^{13} - n$ est divisible par 7.
   (a) Supposons que 7 divise n.
   Alors, 7 divise a fortiori $n\,(n^{12} - 1) = n^{13} - n$.

   (b) Supposons que 7 ne divise pas n.
   Alors $\operatorname{pgcd}(7, n) = 1$, attendu que 7 est premier.
   Le petit théorème de Fermat implique $n^{7-1} \equiv n^6 \equiv 1 \mod 7$.
   Donc $n^{12} \equiv (n^6)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \mod 7$.
   D'où $n^{12} - 1 \equiv 0 \mod 7$, c'est-à-dire 7 divise $n^{12} - 1$.
   Par suite, 7 divise $n\,(n^{12} - 1) = n^{13} - n$.

3) Montrons que $n^{13} - n$ est divisible par 13.
   (a) Supposons que 13 divise n.
   Alors, 13 divise a fortiori $n\,(n^{12} - 1) = n^{13} - n$.

   (b) Supposons que 13 ne divise pas n.
   Alors $\operatorname{pgcd}(13, n) = 1$, attendu que 13 est premier.
   Le petit théorème de Fermat implique $n^{13-1} \equiv n^{12} \equiv 1 \mod 13$.
   D'où $n^{12} - 1 \equiv 0 \mod 13$, c'est-à-dire 13 divise $n^{12} - 1$.
   Par suite, 13 divise $n\,(n^{12} - 1) = n^{13} - n$.