6.20 $\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{7\,n}{15} = \dfrac{3\,n^5 + 5\,n^3 + 7\,n}{15}$

Il s'agit de montrer que $3\,n^5 + 5\,n^3 + 7\,n$ est divisible par 3 et par 5.

1) Montrons que $3\,n^5 + 5\,n^3 + 7\,n$ est divisible par 3.
   (a) Supposons que 3 divise n.
   Alors 3 divise aussi $n\,(3\,n^4 + 5\,n^2 + 7) = 3\,n^5 + 5\,n^3 + 7\,n$.

   (b) Supposons que 3 ne divise pas n.
   Alors $\mathrm{pgcd}(3, n) = 1$, vu que 3 est premier.
   Le petit théorème de Fermat implique que $n^{3-1} \equiv n^2 \equiv 1 \mod 3$.
   Donc $3\,n^4 + 5\,n^2 + 7 \equiv 0 \cdot n^4 + 5 \cdot 1 + 7 \equiv 12 \equiv 0 \mod 3$.
   En d'autres termes, 3 divise $3\,n^4 + 5\,n^2 + 7$.
   Par conséquent, 3 divise $n\,(3\,n^4 + 5\,n^2 + 7) = 3\,n^5 + 5\,n^3 + 7\,n$.

2) Montrons que $3\,n^5 + 5\,n^3 + 7\,n$ est divisible par 5.
   (a) Supposons que 5 divise n.
   Alors 5 divise aussi $n\,(3\,n^4 + 5\,n^2 + 7) = 3\,n^5 + 5\,n^3 + 7\,n$.

   (b) Supposons que 5 ne divise pas n.
   Alors $\mathrm{pgcd}(5, n) = 1$, vu que 5 est premier.
   Le petit théorème de Fermat implique que $n^{5-1} \equiv n^4 \equiv 1 \mod 5$.
   Donc $3\,n^4 + 5\,n^2 + 7 \equiv 3 \cdot 1 + 0 \cdot n^2 + 7 \equiv 10 \equiv 0 \mod 5$.
   En d'autres termes, 5 divise $3\,n^4 + 5\,n^2 + 7$.
   Par conséquent, 5 divise $n\,(3\,n^4 + 5\,n^2 + 7) = 3\,n^5 + 5\,n^3 + 7\,n$.