6.3 1) $2^1 \equiv 2 \mod 7$

$2^2 \equiv 4 \mod 7$

$2^3 \equiv 8 \equiv 1 \mod 7$

On remarque que $2^{n+3} \equiv 2^n \cdot 2^3 \equiv 2^n \cdot 1 \equiv 2^n \mod 7$ pour tout $n \geqslant 0$.

Par conséquent, $2^n \equiv \begin{cases} 2 & \text{si} \quad n \equiv 1 \mod 3 \\ 4 & \text{si} \quad n \equiv 2 \mod 3 \\ 1 & \text{si} \quad n \equiv 3 \mod 3 \end{cases}$

2) $2^1 \equiv 2 \mod 10$

$2^2 \equiv 4 \mod 10$

$2^3 \equiv 8 \mod 10$

$2^4 \equiv 16 \equiv 6 \mod 10$

$2^5 \equiv 2^4 \cdot 2 \equiv 6 \cdot 2 \equiv 12 \equiv 2 \mod 10$

On constate que $2^{n+4} \equiv 2^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

C'est pourquoi, $2^n \equiv \begin{cases} 2 & \text{si} \quad n \equiv 1 \mod 4 \\ 4 & \text{si} \quad n \equiv 2 \mod 4 \\ 8 & \text{si} \quad n \equiv 3 \mod 4 \\ 6 & \text{si} \quad n \equiv 4 \mod 4 \end{cases}$

On remarque que les puissances de 2^n reprennent de façon cyclique les puissances précédentes.